

Лабораторная работа

«Маятник Обербека»

Оборудование: маятник Обербека ($d=34.85\pm 0.1$ мм), нить, твёрдое тело ($m=201\pm 0.1$ г), 4 груза ($m=152\pm 0.1$ г), шкала высот ($\Delta=5$ мм), линейка ($\Delta=1$ мм).

Цель работы: на основе уравнения моментов твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, изучить движение маятника Обербека и экспериментальным путём определить его момент инерции.

Теоретическая часть:

Уравнение движения твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, имеет вид

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M, \text{ где } \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \gamma - \text{угловое ускорение тела,} \quad (1)$$

M - результирующий момент сил, действующих на твёрдое тело, вычисляемый относительно оси вращения, I - момент инерции тела относительно этой же оси.

Момент инерции твёрдого тела является мерой его инертности при вращательном движении, зависит от расположения массы по отношению к оси вращения и определяется равенством:

$$I = \int_V \rho r_{\perp}^2 dV. \quad (2)$$

Здесь ρ - плотность тела, $r_{\perp}$ - расстояние элементарного объёма dV от оси, V - объём тела.

Однако в большинстве случаев вычисление момента инерции по формуле (2) является затруднительным, и тогда особое значение приобретают экспериментальные методы определения момента инерции. В настоящей работе используется один из таких методов - на основе изучения движения маятника Обербека определяется его момента инерции.

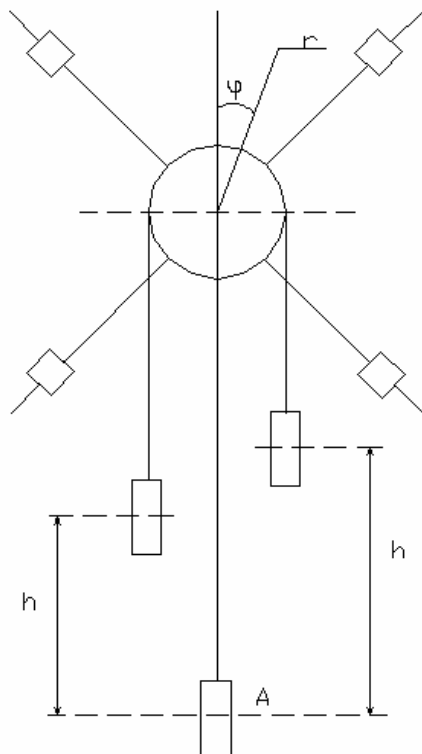


рис. 1.

Маятник Обербека представляет собой блок, к которому на нити подвешен груз массы m . В начальном положении нить намотана на блок, и груз находится на высоте h (см рис. 1). Этот груз, падая, разматывает нить, приводя во вращение блок, достигает своего нижнего положения A и затем поднимается на высоту h' за счёт энергии вращательного движения блока.

К блоку прикреплены четыре спицы, вдоль которых можно перемещать и закреплять грузы одинаковой массы, что позволяет изменять момент инерции I_0 блока.

На маятник действуют две внешние силы: сила тяжести груза m , создающая относительно оси вращения блока момент M_{mg} , и сила трения, создающая момент $M_{тр}$. В этом случае уравнение движения (1) для маятника принимает вид

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_{mg} + M_{mp}, \quad (3)$$

где φ - угол поворота блока, а I - момент инерции маятника относительно оси вращения, складывающийся из моментов инерции блока I_0 и груза mr^2 , т.е.

$$I = I_0 + mr^2. \quad (4)$$

.В дальнейшем будем считать, что момент силы трения остаётся величиной постоянной и равной

$$M_{\text{тр}} = -M_0 = \text{const} < 0. \quad (5)$$

Когда груз спускается вниз из (3) можно получить следующее уравнение

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{mgr - M_0}{I_0 + mr^2} \quad (6)$$

с начальными условиями на угловую скорость ($\omega=0$) и угол поворота ($\varphi=0$). Т.к. правая часть не зависит от времени, уравнение (6) легко интегрируется и в итоге получаются выражения для угловой скорости и угла поворота

$$\omega = \frac{mgr - M_0}{I_0 + mr^2} t, \quad \varphi = \frac{1}{2} \frac{mgr - M_0}{I_0 + mr^2} t^2 \quad (7)$$

В некоторый момент времени t_1 груз массы m достигнет нижнего положения и величины ω и φ примут какие-то значения, которые обозначим ω_1 и φ_1 .

При движении груза вверх уравнение движения маятника принимает несколько отличный от (6) вид

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{mgr + M_0}{I_0 + mr^2} \quad (8)$$

и имеет следующие начальные условия при $t=t_1$ если угол поворота остаётся функцией непрерывной, т.е. $\varphi=\varphi_1$, то угловая скорость может измениться и перед поднятием груза принять значение ω_0 .

Уравнение (8) также легко интегрируется, что позволяет записать с учётом начальных условий следующие выражения для угловой скорости и угла поворота

$$\omega = -\frac{mgr + M_0}{I_0 + mr^2} (t - t_1) + \omega_0 \quad (9)$$

$$\varphi = -\frac{1}{2} \frac{mgr + M_0}{I_0 + mr^2} (t - t_1)^2 + \omega_0 (t - t_1)$$

В некоторый момент времени t_2 маятник останавливается, т.е. угловая скорость будет равной нулю, а угол поворота принимает значение φ_2 .

Из выражений (7) и (9) можно получить систему 4-х уравнений

$$\begin{cases} \omega = \frac{mgr - M_0}{I_0 + mr^2} t_1 \\ \varphi_1 = \frac{1}{2} \frac{mgr - M_0}{I_0 + mr^2} t_1^2 \\ 0 = -\frac{mgr + M_0}{I_0 + mr^2} (t_2 - t_1) + \omega_0 \\ \varphi_2 = \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{mgr + M_0}{I_0 + mr^2} (t_2 - t_1)^2 + \omega_0 (t_2 - t_1) \end{cases} \quad (10)$$

В системе (10) будем считать неизвестными I_0 , M_0 , ω_1 и ω_0 . Опуская промежуточные вычисления, приведём конечный результат

$$I_0 = \frac{mgr(t_2 - t_1)^2}{\varphi_2 - \varphi_1 \left[1 - \left(\frac{t_2}{t_1} - 1 \right)^2 \right]} - mr^2$$

$$M_0 = mgr \frac{\varphi_2 - \varphi_1 \left[1 + \left(\frac{t_2}{t_1} - 1 \right)^2 \right]}{\varphi_2 - \varphi_1 \left[1 - \left(\frac{t_2}{t_1} - 1 \right)^2 \right]} \quad (11)$$

$$\omega_0 = 2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}, \omega_1 = 2 \frac{\varphi_1}{t_1}$$

Соотношения (11) позволяют определить I_0 , M_0 , ω_1 и ω_0 по результатам измерений m , r , φ_1 , φ_2 , t_1 и t_2 .

Экспериментальная часть:

1) Определяем момент инерции блока:

а) без грузов

h1	10	20	30
fi1	76,327116	70,58824	64,84935
h2	41	46,5	53,5
fi2	134,8637	125,9684	116,2123
t1	4,58	4,3	4,08
t2	8,31	8,06	7,59
I	43136,121	43765,05	41950
Mo	24876,255	4419,075	11633,48
I ср		42950,39	
Mo ср		13642,94	

$$I_{cp} = 42950,39 \pm 1228,8$$

$$M_{0cp} = 13642 \pm 6657$$

б) с грузами, закреплёнными на середине спиц

h1	10	20	30
fi1	76,32711621	70,58824	64,84935
h2	28,5	35,5	45
fi2	142,0373027	132,2812	121,0904
t1	7,11	6,9	6,54
t2	13,65	12,41	12,03
I	112067,9655	97048,12	100874,3
Mo	2978,516069	53654,16	35500,23
I ср		103330,1	
Mo ср		30710,97	

$$I_{cp} = 103330,1 \pm 2732,4$$

$$M_{0cp} = 30710 \pm 5022$$

$$R_{rp} = 0,1024 \text{ м}$$

в) с грузами, закреплёнными на концах спиц

h1	10	20	30
fi1	76,32712	70,58824	64,84935
h2	24,5	32,5	42,5
fi2	144,3329	134,0029	122,5251
t1	10,93	10,33	10,1
t2	20,3	19,4	18,56
I	242219,9	239020,3	237490,8
Mo	32945,23	26205,08	40508,44
I ср	239577		
Mo ср	33219,58		

$$I_{cp} = 239577 \pm 4983,1$$

$$M_{0cp} = 33219.58 \pm 4953$$

$$R_{гр} = 0,1875 \text{ м}$$

2) Проверяем, выполняется ли на опыте пропорциональность между $I_{гр}$ и R^2 , где $I_{гр}$ - момент инерции грузов на спицах, а R - расстояние их до оси вращения. Для этого проводим ещё два опыта для случаев, когда $R=0.058$ м и $R=0.143$ м и рассчитываем момент инерции блока.

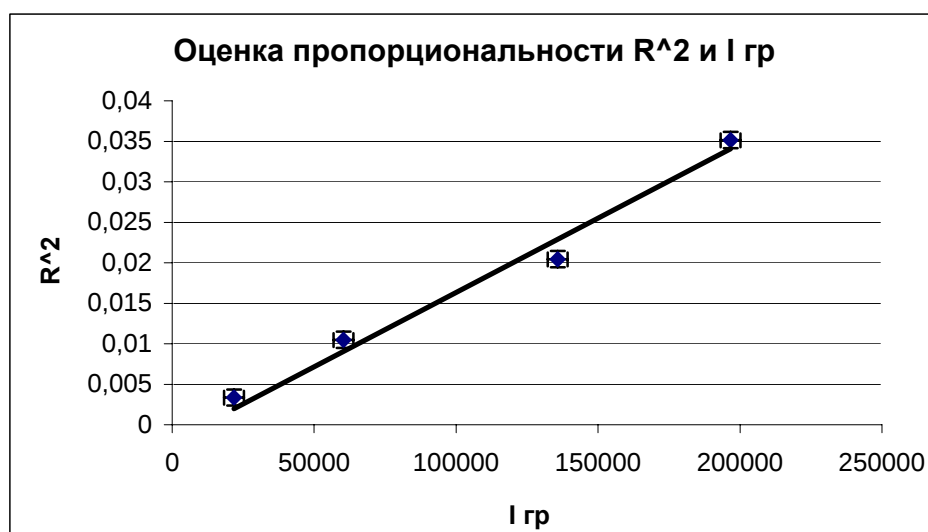
	R=0.058	R=0.143
h1	30	30
fi1	64,84935438	64,84935
h2	49,5	42,5
fi2	118,507891	122,5251
t1	5,05	8,31
t2	9,5	16
I	64736,59234	178683,4

$$I_{cp1} = 64736 \pm 1702,4$$

$$I_{cp2} = 178683,4 \pm 3740,9$$

Чтобы построить искомую зависимость, необходимо найти момент инерции грузов. Для этого вычитаем из имеющихся четырёх значений моментов инерций величину $I_{ср}$, найденную в пункте 1.а - момент инерции блока без грузов, и заносим полученные данные в таблицу.

R^2	$I_{гр}$
0,003364	21786,2
0,0104858	60379,71
0,020449	135733
0,0351563	196626,6



3) Для того, чтобы посчитать потерю энергии при переходе через нижнее положение, для трёх случаев находим ω_0 и ω_1 угловые скорости блока непосредственно до рывка и после него согласно формулам (11): $\omega_0 = 2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}$, $\omega_1 = 2 \frac{\varphi_1}{t_1}$. А потом, принимая, что $E_{кин} = \frac{I\omega^2}{2}$,

находим разность $\Delta E_{кин} = E_{кин1} - E_{кин0} = \frac{I}{2}(\omega_1^2 - \omega_0^2)$ - это и будет потеря кинетической энергии при переходе тела через нижнее положение. А работу силы трения ищем из соотношения, что общая потеря энергии, определяемая из формулы $E_{p1} - E_{p2} = mg(h_2 - h_1)$ будет складываться из потери энергии при рывке вниз (которую мы определили ранее) и, собственно, работы, затрачиваемой на преодоление силы трения.

1) $\Delta E_{кин} = 3,65 \cdot 10^6$

$A = 1,57 \cdot 10^6$

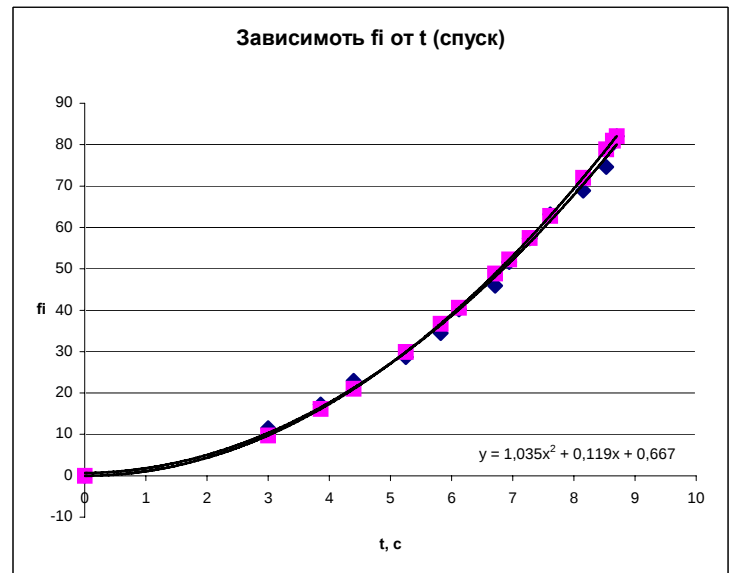
2) $\Delta E_{кин} = 2,1 \cdot 10^5$

$A = 0,9 \cdot 10^6$

4) Снимаем зависимость угла поворота блока от времени строим графики $\varphi(t)$ и $\omega(t)$.

h	t	t ²	fi
0	0	0	0
20	3	9	11,47776
30	3,86	14,8996	17,21664
40	4,4	19,36	22,95552
50	5,25	27,5625	28,6944
60	5,82	33,8724	34,43329
70	6,12	37,4544	40,17217
80	6,71	45,0241	45,91105
90	6,94	48,1636	51,64993
100	7,28	52,9984	57,38881
110	7,61	57,9121	63,12769
120	8,15	66,4225	68,86657
130	8,53	72,7609	74,60545
140	8,64	74,6496	80,34433
143	8,7	75,69	82,066
140	9,22	85,0084	83,78766
130	9,43	88,9249	89,52655
120	9,78	95,6484	95,26543
110	10,11	102,2121	101,0043
100	10,56	111,5136	106,7432
90	11,06	122,3236	112,4821
80	11,47	131,5609	118,2209
70	11,87	140,8969	123,9598
60	12,5	156,25	129,6987
50	13,03	169,7809	135,4376
40	13,97	195,1609	141,1765
30	14,81	219,3361	146,9154
20	16,59	275,2281	152,6542

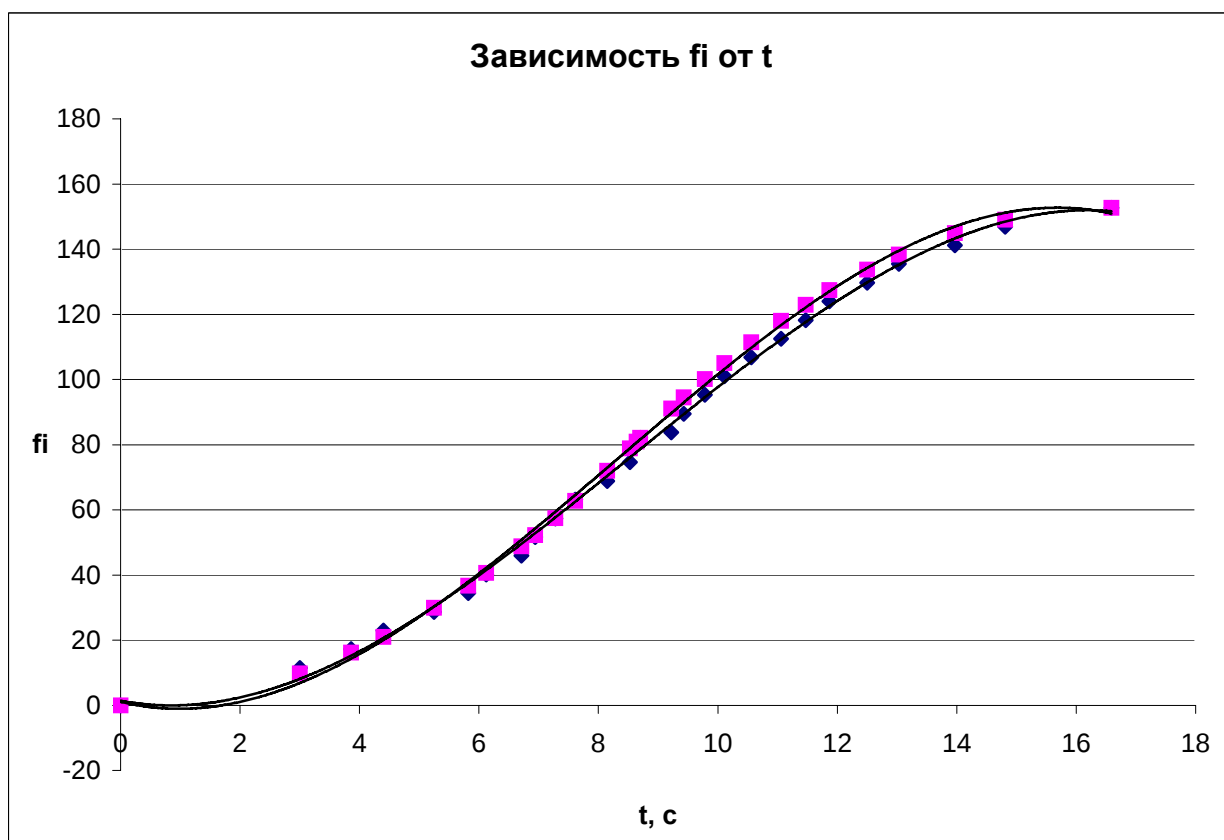
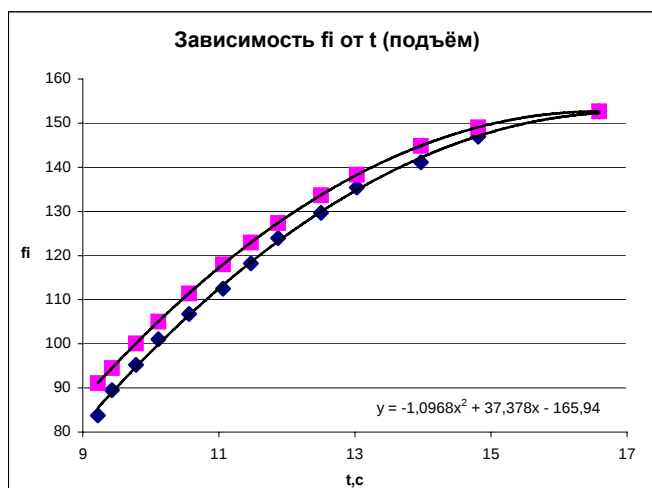
Согласно полученным данным отдельно построены графики зависимости $\varphi(t)$ для подъёма и спуска, а также график изменения φ от t на протяжении целого периода. На все графики наложены теоретические зависимости, рассчитанные согласно формулам (7), (9) и (11) (см. Теоретическая часть).



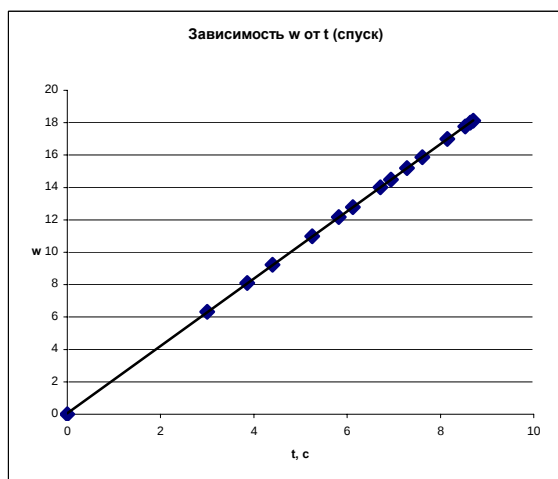
Кроме того были рассчитаны I_0 и M_0 для этого случая:

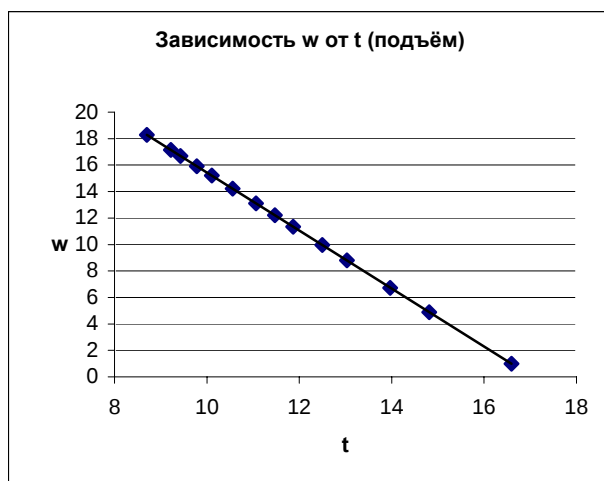
$I_{cp} = 154130,4 \pm 4983,1$

$M_{0cp} = 7686 \pm 3705,2$



Также путём дифференцирования были построены графики, отражающие зависимость $\omega(t)$ для случаев спуска и подъёма.





Вывод: В данной работе было изучено движение маятника Обребека и экспериментальным путём был определён его момент инерции. Полученные в результате проведения работы данные дали неплохой результат, о чём свидетельствует графический анализ построенных зависимостей. Кроме того, была оценена потеря энергии на растяжение нити и работа силы трения, а также посчитаны зависимости $\omega(t)$ и $\varphi(t)$. Итого, можно сказать, что работа была выполнена в целом удачно.